Программа учебной дисциплины
«Функциональный анализ»
(подготовка бакалавра)

Утверждена
Академическим советом ОП
Протокол № __от __2023

Разработчик	Лебедев Владимир Владимирович, профессор департамента прикладной математики МИЭМ НИУ ВШЭ
Число кредитов	2-й курс 4, 3-й курс 3
Контактная работа (час.)	2-й курс 80, 3-й курс 56
Самостоятельная работа (час.)	2-й курс 72, 3-й курс 58
Курс, Образовательная программа	2–3, Прикладная математика
Формат изучения дисциплины	Без использования онлайн курса лекций

1. Цель, результаты освоения дисциплины и пререквизиты

Целями освоения дисциплины «Функциональный анализ» являются:

- ознакомление студентов с основами теории функций и функционального анализа;
- знакомство с некоторыми прикладными задачами дисциплины.

В результате освоения дисциплины студент должен:

- **Знать**: основные положения теорий меры и интегрирования; теорию метрических, нормированных и евклидовых пространств; теорию линейных функционалов и линейных операторов, включая элементы спектрального анализа; теорию преобразования Фурье.
- **Уметь**: применять методы функционального анализа к решению теоретических и прикладных задач, в том числе, к решению теоретико-вероятностных задач, задач математической физики, задач оптимального управления, задач математического моделирования.
- **Иметь навыки** (приобрести опыт) использования стандартных методов функционального анализа и их применения к решению теоретических и прикладных задач.

Настоящая дисциплина относится к циклу математических дисциплин (базовая часть). Изучение данной дисциплины основывается на знаниях и умениях, полученных при изучении курсов:

- «Математический анализ»;
- «Линейная алгебра и аналитическая геометрия»;
- «Теория функций комплексной переменной».

Для освоения дисциплины студенты должны владеть следующими знаниями:

- знание курса «Математический анализ» в полном объеме;
- знание курса «Линейная алгебра и аналитическая геометрия» в части, касающейся теории линейных пространств и теории матриц;
- знание курса «Теория функций комплексной переменной» в части, касающейся рядов Тейлора и Лорана (требуется во второй части курса).

Основные положения дисциплины используются в дальнейшем при изучении следующих курсов:

- «Уравнения математической физики»; «Методы оптимизации»; «Теория вероятностей и математическая статистика»; «Численные методы»; «Теория управления»; «Теория случайных процессов»; «Теоретическая механика».

Формат изучения дисциплины: без использования онлайн курса.

2. Содержание учебной дисциплины

№	Название раздела	Всего часов	Аудиторные часы		Самостоятельная работа
			Лекции	Семинары	
	Часть 1. Второй курс				
1	Сравнение множеств	26	7	7	12
2	Мера и интеграл	54	14	14	26
3	Метрические пространства	54	14	14	26
4	Компактность	18	5	5	8
	Итого:	**152**	**40**	**40**	**72**
	Часть 2. Третий курс				
5	Нормированные пространства.	17	4	4	9

	Банаховы пространства				
6	Евклидовы пространства. Гильбертовы пространства	29	7	7	15
7	Линейные непрерывные функционалы	29	7	7	15
8	Линейные непрерывные операторы	39	10	10	19
	Итого:	**114**	**28**	**28**	**58**

<u>Раздел 1.</u> Сравнение множеств.

Эквивалентность множеств по Кантору. Счётные множества и операции над ними. Несчётные множества. Континуальные множества. Понятие мощности. Теорема Кантора–Бернштейна.

Литература**:** [**1**, гл. I, §3], [**2**, §1].

<u>Раздел 2.</u> Мера и интеграл.

Мера Лебега в R^n. Множества меры нуль. Канторово множество. Пример неизмеримого множества. Операции над измеримыми множествами. Измеримые функции и арифметические операции. Поточечный предельный переход. Терминология «почти всюду». Теоремы Егорова и Лузина об исправлении. Интеграл Лебега. Теоремы о предельном переходе в интегралах (теоремы Лебега, Леви и Фату). Теорема Фубини. Абстрактное пространство с мерой, процедура продолжения меры, интеграл. Мера Стилтьеса, интеграл Стилтьеса.

Литература**:** [**1**, гл. V], [**3**, §§1–3].

<u>Раздел 3.</u> Метрические пространства.

Определение метрического пространства. Примеры метрических пространств $l^2, l^1, l\infty_{\square}, C([a,b]), BC([a,b]), C_2([a,b]), L^1(X), L^2(X), L^\infty(X)$. Шар, окрестность. Предел последовательности точек. Открытые и замкнутые множества. Замыкание. Операции над открытыми и замкнутыми множествами. Всюду плотные множества. Нигде не плотные множества. Сепарабельные метрические пространства. Полные метрические пространства. Теорема о вложенных шарах. Теорема Бэра о категориях. Непрерывные отображения метрических пространств, изометрия. Пополнение. Сжимающие отображения. Теорема о неподвижной точке, ее приложения.

***Литература*:** [**1**, гл. II, §§1–4], [**2**, §2].

<u>Раздел 4.</u> Компактность.

Вполне ограниченные множества в метрических пространствах. Связь вполне ограниченности и ограниченности. Определение ε -сети. Определение компактного множества. Непрерывные функции на компактных множествах. Критерии компактности в некоторых пространствах $\left(C(I), l^1, l^2\right)$.

***Литература*:** [**1**, гл. II, §7], [**2**, §2].

<u>Раздел 5.</u> Нормированные пространства. Банаховы пространства.

Определение линейного нормированного пространства. Естественное расстояние, порождаемое нормой. Банаховы пространства. Непрерывность нормы. Эквивалентные нормы. Изоморфизм и изометрия нормированных пространств. Пополнение. Теорема о почти перпендикуляре и ее следствие о некомпактности шара в бесконечномерном нормированном пространстве. Ряды в нормированных пространствах. Базис.

***Литература*:** [**1**, гл. III, §3], [**2**, §3].

<u>Раздел 6.</u> Евклидовы пространства. Гильбертовы пространства.

Определение евклидова пространства. Неравенство Коши–Буняковского. Естественная норма, порожденная скалярным произведением. Гильбертово пространство. Непрерывность скалярного произведения. Равенство параллелограмма. Неевклидовость пространств $C(I), l^\infty, l^1$. Ортогональность. Критерий сходимости ортогонального ряда. Ортогональное дополнение.

Задача о наилучшем приближении. Ортогональная проекция на подпространство. Полная система векторов. Неравенство Бесселя. Ортогональный базис в сепарабельном гильбертовом пространстве. Ряд Фурье. Равенство Парсеваля. Критерий полноты ортогональной системы. Процедура ортогонализации. Существование ортонормированного базиса в гильбертовом пространстве. Примеры базисов. Теорема об изоморфизме сепарабельных гильбертовых пространств.

***Литература*:** [**1**, гл. III, § 4], [**2**, §4], [**3**, §4].

Раздел 7. Линейные непрерывные функционалы.

Определение линейного непрерывного функионала. Связь непрерывности и ограниченности. Норма функционала. Сопряженное пространство. Полнота сопряженного пространства. Примеры. Теоремы об общем виде функционала в $C(I)$ и в гильбертовом пространстве. Поточечная сходимость и сходимость по норме последовательности функционалов. Принцип равномерной ограниченности (теорема Банаха–Штейнгауза). Критерий слабой сходимости.

***Литература*:** [**1**, гл. IV, §§ 1–3], [**2**, §5].

Раздел 8. Линейные непрерывные операторы.

Определение линейного непрерывного оператора. Связь линейности и ограниченности. Норма оператора. Полнота пространства операторов. Умножение операторов. Сильная и слабая сходимость последовательности операторов. Теорема Банаха–Штейнгауза для операторов. Критерий слабой сходимости. Приложения. Обратный оператор. Теорема Банаха об обратном операторе. Теорема Неймана об обратимости оператора близкого к обратимому. Собственные числа оператора. Спектр и резольвента. Разложение резольвенты в ряд Лорана. Компактные операторы и действия с ними (сумма и произведения на ограниченные). Теорема о собственных числах и собственных векторах компактных операторов. Определение сопряженного оператора. Теорема об операторе, сопряжённом к компактному. Спектральный радиус. Самосопряжённый оператор в гильбертовом пространстве. Спектральный радиус самосопряжённого оператора. Преобразование Фурье в $L^2(R)$, его свойства и приложения.

***Литература*:** [**1**, гл. IV, §§5–6], [**3**, §§5–7].

3. Оценивание

Блокирующие элементы контроля отсутствуют.

Промежуточная аттестация студентов проводится в конце модуля 4 первого года обучения. Окончательная аттестация проводится в конце модуля 2 второго года обучения. В модулях 3-4 первого года обучения проводится коллоквиум и дается домашнее задание. В модулях 1-2 второго года обучения так же проводится коллоквиум и дается домашнее задание. Накопленные оценки $O_{нак1}$ за модули 3–4, первого года и $O_{нак2}$ за модули 1–2 второго года выводятся как среднее арифметическое оценок за домашние задания и коллоквиумы в этих модулях.

В конце модуля 4 первого года проводится промежуточный экзамен. Оценка промежуточной аттестации выводится по правилу

$$O_{па}=\frac{1}{2}O_{нак1}+\frac{1}{2}O_{экз}.$$

В конце модуля 2 второго года проводится итоговый экзамен (по всему курсу). Окончательная (идущая в диплом) оценка по учебной дисциплине формируется следующим образом:

$$O_{окон}=\frac{1}{2}O_{экз}+\frac{1}{4}O_{па}+\frac{1}{4}O_{нак2}.$$

Оценки по всем формам текущего, промежуточного и итогового контроля выставляются по 10-ти балльной шкале с округлением в меньшую сторону.

Студент, получивший неудовлетворительную оценку (меньше 4 баллов по десятибалльной шкале) за контрольную работу или за коллоквиум может исправить свой результат, переписав (один раз) контрольную работу или пересдав (один раз) коллоквиум. Результат переписывания контрольной работы или пересдачи коллоквиума умножается на коэффициент 0.7, но первоначальная оценка не может ухудшиться.

На экзамене проверяется умение студента: 1) формулировать и доказывать теоремы курса (демонстрируя при этом знание соответствующих определений); 2) решать стандартные задачи курса. При доказательстве теорем допустимо пользоваться соображениями и понятиями, выходящими за рамки курса. При этом, однако, студент должен продемонстрировать знание соответствующих определений и методов.

Форма экзаменов – устная. На экзамене даётся два теоретических вопроса и две задачи, оценка выводится как среднее арифметическое.

При накопленной оценке не ниже 8 баллов и активной самостоятельной и аудиторной работе студент может (по его согласию!) быть освобождён преподавателем, ведущим семинары, или лектором от сдачи промежуточного экзамена; в этом случае результирующая оценка совпадает с округлённой накопленной.

4. Примеры оценочных средств

Образец задачи из домашнего задания.

Докажите, что функциональное уравнение $x(t)+\int_0^1 s^2 x^2(s)\,ds=t, 0\le t\le 1,$ имеет единственное решение, принадлежащее замкнутому единичному шару в $C([a,b])$. Найдите это решение с точностью 10^{-3}.

Образец вопроса из коллоквиума.

Сформулируйте теорему о неподвижной точке сжимающего отображения. Запишите оценку расстояния между n -ой итерацией и неподвижной точкой.

Примерный список вопросов к экзаменам (по всему курсу).

Часть 1. Второй курс. Модули 3–4.

1. Выведите формулы двойственности для операций пересечения и объединения.

2. Определите эквивалентность множеств по Кантору.

3. Дайте определение счётного множества. Докажите, что множество Q рациональных чисел является счётным. Докажите, что множество Q^n является счётным. Является ли Q^∞ счётным?

4. Докажите, что объединение не более чем счётного набора счётных множеств является счётным.

5. Докажите, что при добавлении к бесконечному множеству конечного или счётного множества получается множество эквивалентное исходному.

6. Что такое несчетное множество? Докажите, что прямая R является несчётным множеством; выведите отсюда существование трансцендентных чисел.

7. Дайте определение континуального множества. Докажите континуальность множеств R^n, R^∞.

8. Расскажите о понятии мощности X множества Y. Что означают записи $|X|=|Y|, |X|\geq|Y|, \quad |X|>|Y|$? Сформулируйте теорему Кантора–Бернштейна о сравнении множеств.

9. Докажите, что множество $C(I)$ непрерывных функций на отрезке Iявляется континуальным.

10. Докажите, что множество всех подмножеств множества Xимеет мощность большую, чем мощность X.

11. Изложите (схематично) построение меры Лебега вR^n. Приведите примеры множеств лебеговой меры 0 на прямой и плоскости. Докажите, что всякое счетное множество имеет меру

нуль. Приведите пример несчетного множества на прямой, имеющего меру нуль (троичное множество Кантора).

12. Докажите существование неизмеримых по Лебегу множеств.

13. Докажите, что класс измеримых множеств замкнут относительно операций (счетного) объединения, пересечения и перехода к дополнению.

14. Что означает фраза «свойство X выполнено почти всюду»? Дайте определение сходимости последовательности функций почти всюду и сходимости по мере. Как он связаны между собой? Приведите примеры.

15. Дайте определение измеримой функции. Покажите, что класс измеримых функций замкнут относительно арифметических операций и поточечного предельного перехода.

16. Дайте определение сходимости почти всюду и сходимости по мере. Сформулируйте теорему об их связи.

17. Сформулируйте теоремы Егорова и Лузина об исправлении на множестве малой меры.

18. Определите интеграл Лебега (включая интеграл по всему R^n – ограничьтесь одномерным случаем). Сформулируйте и поясните его основные свойства (линейности и правило интегрирования неравенств).

19. Опишите (с обоснованием) связь между интегралом Лебега и интегралом Римана (включая и случай несобственного интеграла Римана).

20. Докажите теорему Лебега о мажорируемом предельном переходе. Сформулируйте теорему Леви о предельном переходе и ее следствие для рядов. Сформулируйте лемму Фату.

21. Сформулируйте теорему Фубини.

22. Дайте определение алгебры множеств. Дайте определения сигма алгебры множеств и меры. Приведите примеры. Сформулируйте теорему о продолжении меры. Дайте определение пространства с мерой.

23. Дайте определение интеграла в случае абстрактного пространства с мерой.

24. Что такое функция распределения? Определите меру Стилтьеса на R. Что такое абсолютно непрерывная мера? Что такое дискретная мера. Что такое интеграл Стилтьеса? Как вычисляется интеграл по абсолютно непрерывной и по дискретной мере.

25. Дайте определение метрического пространства. Определите пространства $l^2, l^1, l\infty, C([a,b]), BC([a,b]), C_2([a,b])$. Определите пространства $L^1(X), L^2(X)$ и $L^\infty(X)$. Что такое подпространство метрического пространства?

26. Дайте определение открытого шара $B(x_0,r)$ и окрестности точки в метрическом пространстве.

27. Дайте определение предела последовательности точек в метрическом пространстве. Докажите единственность предела.

28. Сравните сходимость l^2с покоординатной сходимостью. Сделайте тоже самое для l^1и l^∞.

29. Сравните сходимость в $C([a,b])$ с поточечной сходимостью и со сходимостью в $L^2[a,b]$ и $L^1[a,b]$

30. Дайте определение внутренней точки множества в метрическом пространстве и дайте определение открытого множества. Приведите примеры открытых множеств. Покажите, что открытый шар является открытым множеством.

31. Докажите теорему о строении открытых множеств на прямой R.

32. Дайте определение точки прикосновения и предельной точки множества в метрическом пространстве. Дайте определение замыкания $\overline{E}$множества Eв метрическом пространстве. Выведите основные свойства операции замыкания: $E \subseteq \overline{E}, \overline{\overline{E}} = \overline{E}$, $\overline{E \cup F} = \overline{E} \cup \overline{F}$. Докажите, что $\overline{E \cap F} \subseteq \overline{E} \cap \overline{F}$. Верно ли, что $\overline{E \cap F} = \overline{E} \cap \overline{F}$?

33. Дайте определение замкнутого множества в метрическом пространстве. Докажите теорему, характеризующую замкнутые множества в терминах сходящихся последовательностей.

34. Докажите, что замкнутый шар $\overline{B(x_0, r)}$ является замкнутым множеством.

35. Докажите, что дополнение к открытому множеству является замкнутым множеством, а дополнение к замкнутому является открытым.

36. Докажите, что объединение любого набора открытых множеств является открытым множеством. Докажите, что пересечение любого набора замкнутых множеств является замкнутым множеством.

37. Докажите, что пересечение конечного набора открытых множеств является открытым множеством. Верно ли, что пересечение любого набора открытых множеств является открытым множеством? Приведите контрпример.

38. Докажите, что объединение конечного набора замкнутых множеств является замкнутым множеством. Верно ли, что объединение любого набора замкнутых множеств является замкнутым множеством? Приведите контрпример.

39. Дайте определение множества плотного в некотором множестве метрического пространства. Докажите, что если A плотно в Bи Bплотно в C, то A плотно в C.

40. Что такое всюду плотное множество? Что такое нигде не плотное множество? Приведите примеры. Докажите, что множество $x : x(t_0) = 0$замкнуто и нигде не плотно $C([a,b])$ и всюду плотно в $C_2([a,b])$

41. Докажите, что множество $x : \sum_{k=1}^{\infty} x_k = 0$замкнуто и нигде не плотно в l^1и всюду плотно в l^2.

42. Дайте определение сепарабельного метрического пространства. Докажите сепарабельность прямой R. Докажите сепарабельность R^n.

43. Докажите, что пространство l^2 сепарабельно. Докажите, что пространство l^1 сепарабельно. Докажите, что l^∞ не сепарабельно.

44. Сформулируйте теорему Вейерштрасса о многочленах и выведите из нее сепарабельность пространства $C([a,b])$.

45. Докажите сепарабельность$L^1[a,b], L^1(R), L^2[a,b], L^2(R)$. Сепарабельно ли $L^\infty[a,b]$?

46. Дайте определение полного метрического пространства. Докажите полноту прямой R. Приведите пример метрического пространства, не являющегося полным.

47. Докажите полноту пространств l^2, l^1.

48. Докажите полноту пространств $l^\infty, C([a,b])$.

49. Докажите полноту пространств $L^1(X), L^2(X)$ и $L^\infty(X)$ в случае $X=[a,b]$ и $X=R$. Сравните $C_2([a,b])$ и $L^2[a,b]$.

50. Докажите, что если X – полное метрическое пространство и Yего подпространство, то Yполно тогда и только тогда, когда оно замкнуто.

51. Докажите теорему о вложенных шарах в метрических пространствах.

52. Сформулируйте теорему Бэра о полных метрических пространствах.

53. Дайте определение непрерывного отображения одного метрического пространства в другое. Покажите, что отображение непрерывно тогда и только тогда, когда прообраз всякого открытого множества открыт. Что такое изометричные пространства?

54. Дайте определение пополнения метрического пространства. Приведите примеры. Сформулируйте теорему о пополнении метрических пространств.

55. Дайте определение сжимающего отображения в метрическом пространстве, приведите примеры. Является ли отображение $t \to \sin t$ сжимающим как отображение прямой R в себя?

56. Докажите теорему о неподвижной точке сжимающего отображения. Выведите оценку расстояния между n -ой итерацией и неподвижной точкой.

57. Приведите примеры применения теоремы о неподвижной точке.

58. При помощи теоремы о неподвижной точке докажите теорему существования и единственности решения задачи Коши $y'=f(x,y), y(0)=y_0$ при некоторых (каких?) условиях на f.

59. Дайте определение вполне ограниченного множества в метрическом пространстве. Приведите примеры. Покажите, что всякое вполне ограниченное множество является ограниченным. Верно ли обратное (рассмотрите шар в l^2)?

60. Докажите, что в конечномерном нормированном пространстве понятия ``ограниченность" и «вполне ограниченность» совпадают.

61. Что называется ε -сетью для множества K в метрическом пространстве? Покажите, что Kявляется вполне ограниченным тогда и только тогда, когда при любом $\varepsilon>0$существует конечная ε -сеть для K.

62. Дайте определение компактного множества в метрическом пространстве. Приведите примеры. Докажите теорему о связи вполне ограниченности и компактности.

63. Докажите теорему Вейерштрасса о непрерывных функциях на компактных множествах. Приведите пример, показывающий, что условие компактности множества в этой теореме нельзя заменить условием ограниченности и замкнутости. Определите пространство $C(K)$.

64. Докажите теорему Арцела (критерий вполне ограниченности множества в $C([a,b])$). Проиллюстрируйте ее применение на примерах.

65. Сформулируйте критерии вполне ограниченности множества l^2и l^1. Выведите один из них. Проиллюстрируйте их применения (например, рассмотрите «гильбертов кирпич»).

Часть 2. Третий курс. Модули 1–2.

1. Дайте определение нормированного пространства. Приведите примеры. Покажите, что соотношение $\rho(x,y)=\|x-y\|$ определяет метрику в нормированном пространстве (естественная метрика, порожденная нормой).

2. Что такое банахово пространство. Что называют (замкнутым) подпространством нормированного пространства? Докажите свойство непрерывности нормы.

3. Что такое эквивалентные нормы? Являются ли нормы $\|x\|_1=max_{[0,1]}|x(t)|$и $\|x\|_2=\int_0^1|x(t)|dt$эквивалентными в пространстве непрерывных функций на отрезке $[0,1]$? Покажите, что любые две нормы в конечномерном пространстве – эквивалентны.

4. Дайте определение линейно изоморфных и линейно изометрических нормированных пространств. Сформулируйте теорему о пополнении нормированных пространств.

5. Докажите лемму о почти перпендикуляре и докажите, что шар в линейном нормированном пространстве вполне ограничен лишь в случае, когда пространство конечномерно.

6. Дайте определение сходящегося ряда в нормированном пространстве. Покажите, что если ряд $\sum_{k=1}^{\infty}x_k$сходится, то его члены стремятся к нулю, т.е. $\|x_k\|\to 0$ (необходимое условие сходимости). Покажите, что в банаховом пространстве из сходимости числового ряда $\sum_{k=1}^{\infty}\|x_k\|$ следует сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty}x_k$ (достаточное условие сходимости).

7. Дайте определение базиса в нормированном пространстве. Покажите, что всякое нормированное пространство с базисом сепарабельно.

8. Дайте определение евклидова пространства. Выведите неравенство Коши -- Буняковского -- Шварца. Как определяется естественная норма в евклидовом

пространстве? Что такое гильбертово пространство? Покажите, что скалярное произведение является непрерывной функцией сомножителей.

9. Выведите равенство параллелограмма в евклидовом пространстве. Сформулируйте критерий того, что норма в нормированном пространстве порождена скалярным произведением.

Докажите, что пространство $C([a,b])$ не является евклидовым.

10. Когда говорят, что два вектора в евклидовом пространстве ортогональны? Дайте определение ортогональной системы векторов в евклидовом пространстве. Что называют ортонормированной системой векторов? Покажите, что если $x_j, j=1,2,\ldots$ ортогональная система в гильбертовом пространстве H то ряд

$\sum_{j=1}^{\infty} x_j$сходится в H тогда и только тогда, когда сходится числовой ряд

$\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^2$ (критерий сходимости ортогонального ряда).

11. Дайте определение (замкнутого) подпространства H_0 гильбертова пространства H .Покажите, что H_0 является гильбертовым. Дайте определение ортогонального дополнения $H_0^{\perp}$ к H_0; покажите, что $H_0^{\perp}$ является замкнутым подпространством.

12. Сформулируйте задачу о наилучшем приближении в общем случае метрических пространств; дайте определение элемента наилучшего приближения. Дайте определение ортогональной проекции вектора на подпространство в гильбертовом пространстве. Сформулируйте утверждение о существовании ортогональной проекции вектора на подпространство и докажите ее единственность. Как связаны проекция и элемент наилучшего приближения в гильбертовом пространстве?

13. Дайте определение линейной оболочки системы векторов в линейном нормированном пространстве. Дайте определение полной системы векторов. Приведите примеры.

14. Выведите формулу для ортогональной проекции вектора на подпространство $\Pi = e_1, e_2, \ldots, e_N >¿$, являющееся линейной оболочкой конечной системы $e_1, e_2, \ldots, e_N$, образующих ортонормированную систему в евклидовом пространстве.

15. Выведите неравенство Бесселя.

16. Покажите, что полная ортонормированная система в гильбертовом пространстве является базисом и выведите теорему о разложении в ряд Фурье по полной ортонормированной системе в гильбертовом пространстве. Выведите равенство Парсеваля.

17. Выведите критерий полноты ортогональной системы в гильбертовом пространстве.

18. Изложите процедуру ортогонализации.

19. Докажите теорему о существовании ортонормированного базиса в сепарабельном гильбертовом пространстве. Приведите примеры таких базисов.

20. Докажите теорему об изоморфизме сепарабельных гильбертовых пространств.

21. Дайте определение линейного непрерывного функционала, заданного на нормированном пространстве. Дайте определение линейного ограниченного функционала. Покажите, что эти понятия совпадают. Приведите примеры. Дайте определение нормы функционала (укажите все три эквивалентных определения). Дайте определение пространства $X^{\square}$ сопряженного к нормированному пространству X.

22. Приведите примеры линейных функционалов в пространстве $C([a,b])$. Сформулируйте теорему Рисса об общем виде ограниченных линейных функционалов в этом пространстве. Как вычислить норму функционала, порожденного мерой не содержащей сингулярной компоненты?

23. Докажите теорему Рисса об общем виде ограниченного линейного функционала в гильбертовом пространстве. Чему равна норма такого функционала? Какие следствия влечет эта теорема для пространства l^2и $L^2[a,b]$?

24. Когда говорят, что последовательность функционалов $f_n \in X^{*}, n=1,2,\ldots$, сходится слабо (поточечно)? Когда говорят, что она сходится сильно (по норме)? Приведите примеры.

Докажите единственность слабого и сильного предела (если они есть). Докажите, что из сильной сходимости вытекает слабая сходимость к тому же пределу.

25. Рассмотрим последовательность функционалов $f_n, n=1,2,\ldots$, на $C([0,1])$, вида $f_n(x)=x(1/n)$. Является ли эта последовательность слабо сходящейся? Сильно сходящейся? Если да, то каков предел?

26. Рассмотрим последовательность функционалов $f_n, n=1,2,\ldots$, на $C([0,1])$ вида $f_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x\left(\frac{k}{n}\right)$. Является ли эта последовательность слабо сходящейся? Сильно сходящейся? Если да, то каков предел?

27. Докажите, что дельта-функция является слабым пределом некоторой последовательности функционалов интегрального типа. Можно ли здесь слабый предел заменить сильным.

28. Сформулируйте теорему Банаха–Штейнгауза (принцип равномерной ограниченности для последовательности функционалов). Выведите критерий слабой сходимости последовательности функционалов.

29. Докажите полноту сопряжённого пространства.

30. Дайте определение линейного непрерывного оператора, действующего из одного нормированного пространства в другое. Дайте определение ограниченного линейного оператора. Покажите, что эти понятия совпадают. Приведите примеры. Дайте определение нормы оператора (укажите все три эквивалентных определения).

31. Покажите, что пространство $B(X, Y)$ линейных ограниченных операторов, действующих из Xв Yс естественными операциями умножения на скаляры и суммы, является линейным нормированным пространством. Покажите, что если Y банахово, то $B(X,Y)$ также банахово.

32. Дайте определение произведения операторов. Выведите оценку нормы произведения через нормы сомножителей. Покажите, что пространство $B(X)$ линейных ограниченных операторов, действующих из Xв Xобразует алгебру.

33. Вычислите норму: а) диагонального оператора в l^2; б) оператора умножения на функцию в $L^2[a,b]$.

34. Выведите оценку сверху для нормы интегрального оператора в $L^2[a,b]$.

35. Дайте определение сильной (по норме) и слабой (поточечной) сходимости последователь-ности операторов. Покажите, что из сильной сходимости вытекает слабая (к тому же пределу), но обратное неверно (рассмотрите в l^2 последовательность операторов $I_n:(x_1,x_2,\ldots)\to(x_1,x_2,\ldots,x_n,0,0,\ldots)$).

36. Сформулируйте теорему Банаха–Штейнгауза для операторов (принцип равномерной ограниченности для последовательности операторов). Выведите критерий слабой сходимости последовательности операторов.

37. Определите понятие обратного оператора. Что означает обратимость оператора на языке отображений? На языке уравнений? Приведите примеры. Сформулируйте теорему Банаха об обратном операторе.

38. Выведите условия обратимости диагонального оператора в l^2и оператора умножения на функцию в $L^2[a,b]$.

39. Докажите, что если $\|I-A\|<1$, то A обратим и докажите более общую теорему Неймана об обратимости оператора, близкого к обратимому.

40. Определите понятие регулярного числа и спектра оператора. Приведите соответствующие примеры для диагонального оператора в l^2 и оператора умножения в $L^2[a,b]$. Покажите, что всякое собственное число является точкой спектра. Верно ли обратное?

41. Покажите, что спектр является замкнутым ограниченным множеством на комплексной плоскости. Что такое спектральный радиус оператора? Получите оценку спектрального радиуса через норму оператора. Сформулируйте теорему о не пустоте спектра.

42. Дайте определение резольвенты оператора. Выведите её разложение в ряд Лорана.

43. Изложите метод решения интегральных уравнений, основанный на разложении резольвенты оператора в ряд Лорана.

44. Определите понятие компактного (вполне ограниченного) оператора и приведите примеры. Докажите компактность интегрального оператора с квадратично суммируемым ядром.

45. Покажите, что если A компактный оператор и B ограниченный, то операторы ABи BA компактные. Покажите, что тождественный оператор в бесконечномерном пространстве не является компактным. Покажите, что если последовательность компактных операторов $A_n, n=1, 2, \ldots,$ сходится по норме к оператору A, то A компактен.

46. Докажите теорему о собственных числах и собственных векторах компактного оператора.

47. Дайте определение оператора A^{*} сопряжённого к A. Покажите, что оператор сопряжённый к компактному – компактен.

48. Дайте определение и выведите простейшие свойства самосопряжённых операторов в гильбертовом пространстве. Докажите, что спектральный радиус самосопряженного оператора равен его норме.

49. Определите преобразование Фурье в пространствах $L^2(T)$ и $L^2(R)$. Выведите его основные свойства (линейность, преобразование Фурье свертки, связь скорости убывания с гладкостью). Выведите формулу обращения.

5. Ресурсы

5.1. Рекомендуемая основная литература

[1] Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1976 (а также более поздние издания).

5.2. Рекомендуемая дополнительная литература

[2] Олевский А. М. Задачи по функциональному анализу. Выпуск 1 и 2. – М.: МИЭМ, 1987.

[3] Олевский А. М. Задачи по функциональному анализу (Мера и интеграл Лебега. Линейные операторы). – М.: МИЭМ, 1987.

[4] Кирилллов А. А., Гвишиани А. Д. Теоремы и задачи функционального анализа. – М.: Наука, 1988.

[5] Бородин П. А., Савчук А. М., Шейпак И. А. Задачи по функциональному анализу. – М.: Изд- во ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ им. М.В. Ломоносова, 2010.

[6] Люстерник Л. А., Соболев В. И. Элементы функционального анализа. – М.: Наука, 1965.

[7] Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики, т. 1 «Функциональный анализ». – М.: Мир, 1977.

[8] Рудин У. Функциональный анализ. – М.: Мир, 1975.

5.3. Программное обеспечение не предусмотрено.

5.4. Профессиональные базы данных, информационные справочные системы, интернет-ресурсы (электронные образовательные ресурсы) не предусмотрены.

5.5. Материально-техническое обеспечение дисциплины не предусмотрено.

6. Особенности организации обучения для лиц с ограниченными возможностями здоровья и инвалидов

В случае необходимости, обучающимся из числа лиц с ограниченными возможностями здоровья (по заявлению обучающегося) а для инвалидов также в соответствии с индивидуальной программой реабилитации инвалида, могут предлагаться следующие варианты восприятия учебной информации с учетом их индивидуальных психофизических особенностей, в том числе с применением электронного обучения и дистанционных технологий:

6.1. *для лиц с нарушениями зрения:* в печатной форме увеличенным шрифтом; в форме электронного документа; в форме аудиофайла (перевод учебных материалов в аудиоформат); в печатной форме на языке Брайля; индивидуальные консультации с привлечением тифлосурдопереводчика; индивидуальные задания и консультации.

6.2. *для лиц с нарушениями слуха*: в печатной форме; в форме электронного документа; видеоматериалы с субтитрами; индивидуальные консультации с привлечением сурдопереводчика; индивидуальные задания и консультации.

6.3. *для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата*: в печатной форме; в форме электронного документа; в форме аудиофайла; индивидуальные задания и консультации.

7. Дополнительные сведения

Дополнительные сведения отсутствуют.